UFMG

Álgebra I - 2ª Avaliação
4 de novembro 2007

Exercício 1. 1.1 ?

1.2 Certo. Basta saber que o grau de uma extensão algébrica é o grau do polinômio mínimo. No caso x^2+2.

Exercício 2. Seja $f\in L$ então:

$$f(x)=p(x)\,q(x)+r(x)$$
$$\text{Seja}\,\alpha\in K$$
$$f(\alpha)=p(\alpha)\,q(\alpha)+r(\alpha),\text{se}\,f(\alpha)\neq 0\,\text{ent}\tilde{a}o$$
$$p\,n\tilde{a}o\,\text{divide}\,f\,,\text{logo existe uma relação tal que}$$
$$g(x)\,p(x)+h(x)\,f(x)=1+<p(x)>,\text{com}\,g(x)\,,h(x)\in L$$
$$\text{Como}\,g(x)p(x)=0+<p(x)>=<p(x)>\Rightarrow<p(x)>+h(x)f(x)=1+<p(x)>$$
$$\text{Portanto},\,L\,\acute{e}\,\text{corpo}.$$

Exercício 3. Desde já temos $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\,\sqrt[3]{3},\,\sqrt[5]{5})$ algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Tomamos agora $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=K$, claramente algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Façamos agora $M=K[\sqrt[3]{3}]$, também algébrico sobre $K e \mathbb{Q}$, portanto as combinações de potências de $\sqrt[3]{3}$ com coeficientes em K são algébricas sobre $\mathbb{Q}$, em particular $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ também será. Indo mais adiante de maneira análoga, temos $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$ algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

O grau do polinômio mínimo provavelmente será 5, afinal aqui vale a multiplicidade dos graus.
$M=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{5});L=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5});K=\mathbb{Q}$
$[M\colon K]=[M\colon L]\,[L\colon K]$

Exercício 4. M' algébrico sobre M pode se tornar evidente se pensarmos na relações dos coeficientes. Um polinômio $x^2+\mathrm{b}x+c$ temos $b=x'+x''$; $c=x'\,x''$,portanto um polinômio com raízes $x,\,y,\,z$ precisamos exatamente de coeficientes do tipo $x+y+z,\,x\,y+x\,z+y\,z,\,x\,z\,y$, ou seja, elementos de M.