

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & &
 \end{array}$$

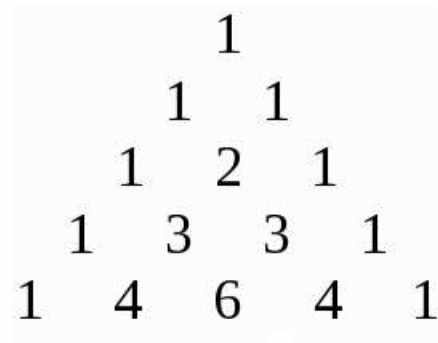


figura 1. Triângulo de Pascal até a 4ª linha

Teorema 1. *A soma dos números ao longo de uma diagonal até determinada linha é o valor imediatamente abaixo do último termo da soma. Em números:*

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

Demonstração. Inicialmente comecemos com alguns poucos n's e k's.

Para n=2 e k=1, temos:

$$\binom{2}{0} + \binom{3}{1} = 4$$

Rescrevendo:

$$\text{como, } \binom{2}{0} = \binom{3}{0}$$

$$\text{pela propriedade, } \binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1}$$

Para $n=2$ e $k=2$:

$$\begin{aligned} \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} &= 10 \\ \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} &= 10 \\ \binom{3}{0} + \binom{3}{1} &= \binom{4}{1} \Rightarrow \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2} \\ \binom{5}{2} &= \binom{2+2+1}{2} = \binom{n+k+1}{k} \text{ para } k=2, n=2; \end{aligned}$$

Bom, parece que é verdade, mas será que vale para valores maiores de k e n ? A prova segue por indução:

Para $k=1$

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1+1}{1} \text{ (pela propriedade)}$$

Para $k=j$ (hipótese de indução)

$$\sum_{i=0}^j \binom{n+i}{i} = \binom{n+j+1}{j}$$

Para $k=j+1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j+1} \binom{n+i}{i} &= \binom{n+j+2}{j+1} \\ \sum_{i=0}^{j+1} \binom{n+i}{i} &= \sum_{i=0}^j \binom{n+i}{i} + \binom{n+j+1}{j+1} \\ \text{por hipótese: } \sum_{i=0}^j \binom{n+i}{i} &= \binom{n+j+1}{j} \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{j+1} \binom{n+i}{i} &= \binom{n+j+1}{j} + \binom{n+j+1}{j+1} \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{j+1} \binom{n+i}{i} = \binom{n+j+2}{j+1} \end{aligned}$$

□