1º Simuladão de Álgebra I

1. *$I \cdot J = I \cap J$ para co-maximais.*

   $I \cdot J \subset I \cap J$, $I \cdot J = \{x \cdot y \,|\, x \in I \text{ e } y \in J\}$

   Seja, $x \in I e\, a \in J$ como $I, J \subset A$, logo $x, a \in A$, portanto $a \cdot x \in I e$ $x \cdot a \in J$. Por se tratar se um anel comutativo, logo $I \cdot J \subset I \cap J$.

   $I \cap J = I \cdot J$

   Como ambos são ideais co-maximais, então $1 \in I + J$. Seja $x \in I e\, y \in J e\, z \in I \cap J$, então para algum x e y vale $x + y = 1 \Rightarrow z \cdot x + z \cdot y = z$, logo um elemento da interseção se escreve como combinação de elementos do produto, afinal $z \cdot x \in I \cdot J e$ $z \cdot y \in I \cdot J$.

2. $\bar{J}$ ideal de $\bar{A}$.

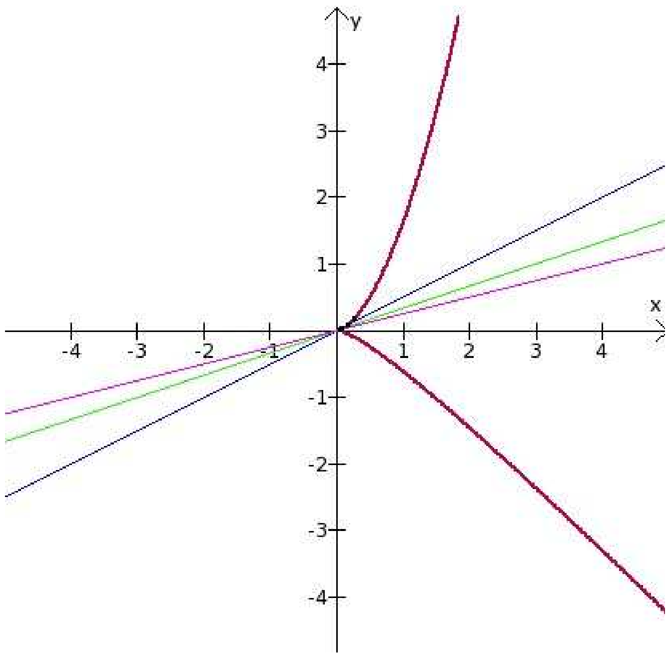
   Como se trata de um homomorfismo $h(a\,x + y) = h(a) \cdot h(x) + h(y) = \overline{a \cdot x + y} = \bar{a} \cdot \bar{x} + \bar{y}$ sendo $a\,x + y \in J$, logo $\bar{a} \cdot \bar{x} + \bar{y} \in \bar{J}$ ideal de $\bar{A}$ O que mostra o fato de todo ideal de $\bar{A}$, ser obtido dessa maneira, partido de um elemento de J ...

3.

4. Ao passar o quociente por $x^2 + x + 1$ em $\mathbb{Z}_2[x]$, automaticamente temos a classe de $x^2 + x + 1$ sendo zero. $\overline{x^2 + x + 1} = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 = \overline{x + 1}$ elevando ambos lados ao quadrado $\bar{x}^4 = \overline{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow \bar{x}^4 = \overline{x^2 + 1} = \bar{x}$. Resumindo, elevando a quarta potência caímos em x, portanto ao dividir por x^{80} é de se esperar cair em x novamente.

5. Seja $\alpha(t), \beta(t)$ funções racionais não ambas nulas. Seja $\alpha(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ (com p e q polinômios), temos $F(T) = \alpha(t)\, q(T) - p(T)$ como t satisfaz essa quação polinomial t é algébrico sobre $k(\alpha(t))$, então $k(t)$ é uma extensão algébrica de $k(\alpha(t))$. Portanto $\beta(t) \in k(t)$ é algébrico sobre $k(\alpha(t))$ o que implica existir $f \in k(\alpha(t))[T]$ com $f(\beta(t)) = 0$.

   Consideramos a curva $y^2 = x^3 + x^2\, y$ e o conjunto de retas do tipo $y = m \cdot x$, $m \in \mathbb{Q}$. O fato do parâmetro m ser racional não é mero detalhe, assim é possível controlar as interseções de modo a garantir que sejam racionais. Como é possível ter infinitas retas, convém esperar infinitos racionais pertencentes a curva.



A expressão geral para tais pares, basta resolver as interseções sendo $x = \frac{m^2}{1+m}; y = \frac{m^3}{1+m}$

6. Se eu realmente compreendi a questão: É possível realizar a trissecção do ângulo de 45^0 justamente por serem 3 ângulos de 15^0. Que é a bissecção do ângulo de 30^0,que por sua vez é a bissecção de 60^0, o qual é o ângulo *mor* da construção por régua e compasso, talvez porque seja relativamente fácil obter um triângulo equilátero...

7. Para que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ seja algébrico sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, deve existir $f \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ tal que $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$. Acho que não é preciso provar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo, basta escrever os elementos do conjunto como $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, daí mostrar que todo elemento é invertível...

   Não é uma solução elegante, mas o fato de existir essa raíz quadrada convém pensar em um polinômio de grau 2 com uma raiz $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, afinal esse argumento funcionou para $\sqrt{2}$ algébrico sobre $\mathbb{Q}$...

   O que sabemos sobre raízes de polinômios de grau 2 é:

   $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, então pensamos em obrigar o discriminante a exibir uma raiz de 3. Devido a essa divisão por 2, convém fazer "pular" da raiz um 2 e $b = -2\sqrt{2}$, agora com a=1 forçamos $\Delta = 4 \cdot 3$, o que nos dá um c=-1. Pronto, temos $f(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ tal que $f(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$ com $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$