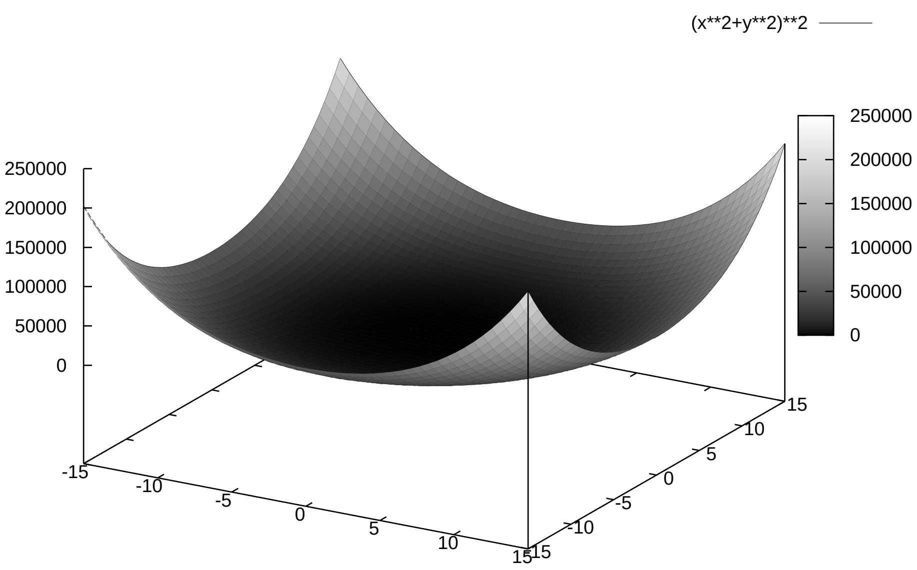
Equação do plano tangente a função de duas variáveis

Seja uma função em duas variáveis

$$f\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2$$



Proposição 1. *Determinamos a equação do plano tangente a f no ponto P(x,y,z) como sendo o plano de equação:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - x_p) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - y_p) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (z - z_p) = 0$$

Demostração. Sabemos que a derivação parcial em torno de P(a,b,c) nos dá a inclinação da reta tangente em P. Derivando e determinando as equações das retas tangentes (sim, são duas, para x e y,mas vou determinar somente uma):

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - a)$$

A equação foi determinada dessa maneira pois ao derivar parcialmente, y é constante, logo estamos com uma reta em algum plano paralelo a xz. Dessa maneira temos como um dos vetores tangentes:

$$\vec{v}\,(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$$

Por que dessas coordernadas? Simples, basta parametrizar a reta, resolver a equação para t e ver que ao determinar a equação cartesiana o termo que multiplica (x-a) é justamente a coordenada z do vertor diretor da reta em questão. Veja:

$$x = a + \alpha \cdot t$$
$$y = b + \beta \cdot t$$
$$z = c + \gamma \cdot t$$

Como no caso, temos uma reta contida em um plano paralelo a xz, $\beta = 0$, resolvendo para t:

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{z-c}{\gamma} \Longrightarrow \alpha \cdot (z-c) = \gamma \cdot (x-a), \text{portanto}$$

$$\gamma = \frac{\partial f}{\partial x}, \alpha = 1;$$

De modo totalmente análogo conclui-se que o outro vetor tangente é:

$$\vec{u}\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Então:

$$\vec{v} \times \vec{u} \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$$

Resolva o produto vetorial da maneira que achar melhor...

Obtemos um vetor normal ao plano, agora basta usar suas coordenadas $e\,o$ ponto P para determinar a equação:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y-b) - 1 \cdot (z-c) = 0$$

Lembrando que $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$. Basta reescrever $f(x,y)$ como:

$(x^2 + y^2)^2 - z = 0$... derivando com relação $a\,z$...

$\square$