Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Figura1. triângulo de Pascal até a $4^{\underline{a}}$ linha

Proposição 1. *O triângulo de Pascal é simétrico em relação a reta vertical que passa por seu pico.*

Demostração. É natural. Basta lembrar que de um conjunto com n-elementos, ao se escolher sub-conjuntos com a-elementos, automáticamente já fizemos a escolha dos sub-conjuntos com (n-a)-elementos. □

Proposição 2. *A soma dos inteiros da n-esíma linha é o número de sub-conjuntos de um conjunto com n-elementos.*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Demostração. Vamos expandir esse somatório para tentar enxergar algo conhecido:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$$

Agora a prova é realmente uma trivialidade, afinal o que estamos fazendo é somando o nº de sub-conjuntos com 0,1,2,...,n elementos e essa soma só pode ser o número de sub-conjuntos do conjunto com n-elementos.

Na verdade essa demonstração é uma trivialidade, afinal já foi demonstrado porque 2^n é o nº de sub-conjuntos de um dado conjunto com n-elementos. 2 opções para cada elemento estar ou não em dado sub-conjunto... $\square$